242 - Utilisation en probabilités de la transformation de Fourier ou de Laplace et du produit de convolution.

Introduction : pour une va X à valeurs entières positives, on peut définir la fonction génératrice E(z^X) où z est un nombre complexe [Ren 123]. La fonction génératrice d'une v.a caractérise immédiatement sa loi, car G(z)=E(z^X)=sum(p_k*z_k) donc on peut exprimer p_k en fonction des dérivées de G (série entière) (toujours [Ren]). La fonction génératrice va nous servir pour étudier les lois de somme de va, étudier la cv de va etc. Les transformée de Laplace et Fourier vont généraliser la fonction génératrice aux v.a à valeurs réelles.

I) <u>Définitions et premières propriétés</u> [BL] + [GS] + [Ross]

A priori, on travaille avec des variables aléatoires (pas de vecteurs).

1) <u>Définitions</u> [BL]

Déf : fonction caractéristique (FC) : E(exp(itX)) [BL 61] *(attention : par de – dans la déf de la TF)*

Pptés : la fct caractéristique est à valeurs complexes, de module plus petit que 1, vaut 1 en 0. Expression pour une va à densité [BL 62]

Déf : transformée de Laplace (FGM) : E(exp(sX)), définie pour les valeurs de s où exp(sX) est intégrable [BL 66] *(attention : la FGM n'est pas définie partout)*

Exemples : [BL 229] [Ross 408]

2) <u>Formules d'inversion et caractérisation de la loi</u> [GS]

Th : inversion de Fourier pour une loi à densité dont la FC est intégrable [GS 189] [Carr 75] *(utilise la FC d'une loi normale, des résultats sur la loi normale, deux fois le TCD)*

Th : on définit la fonction « demi somme » de la fct de rép, et on a une formule [GS 189]

Cor : deux lois on même FC ssi elles ont même lois [GS 189]

Cor : Cc est dense dans l'image de la TF

Th : de même, la FGM caractérise la loi si elle est finie au vois de 0 [BL 66] *(soient deux FGM finies au vois de 0. Elles sont analytiques su un intervalle [-R,R] donc coïncident sur toute la bande verticale du plan complexe. Or pour a dans [-R,R], FGM(a+it) est la FC. Donc les lois ont même FC, donc c'es les mêmes)*

3) <u>FC, FGM et moments</u> [BL] + [GS] + [Ross]

Déf : moment [BL 53]

Deux va ayant même loi ont même moments. Réciproque ? La réciproque est fausse *(loi log normale : si X est une Gaussienne réduite, la va Z=exp(X) suit une loi log normale, et on peut trouver une va qui a mêmes moments mais pas même loi [BL 68])*

Prop : si la FGM est définie sur un voisinage de 0, alors elle est analytique sur ce voisinage et L(t)=sum(t^n*E(X^n)/n !). En particulier, la dérivée n-ème de L en 0 donne le n-ème moment [BL 66] *(d'où le nom fonction génératrice des moments ; facile à montrer)*

Prop :

- si E([X|^n) est fini alors la FC est n fois dérivable et sa dérivée est i^kE(X^kexp(itX)). En particulier, sa dérivée en 0 est i^kE(X^k) [BL 64]

- si la FC est k fois dérivable en 0 alors il existe un moment d'ordre k si k est pair, d'ordre k-1 si k est impair [GS 183] *(attention : une FC peut être dérivable en zéro sans que la va soit intégrable [Ouv 210])*

Csq : si les moments sont finis jusqu'à n alors on a un DL de la FC

Appl 1 : calcul des moments [Ross 405]

Appl 2 : problème des moments
On se demande quand une loi est entièrement caractérisée par ses moments. Il n'existe pas de CNS. Voici un cas :

Prop : si la FC ou la FGM sont analytiques sur un voisinage de 0, alors deux lois sont égales ssi elles ont mêmes moments *(sens direct facile. Si deux lois ont même moments, les deux FC ont mêmes dérivées en 0, donc même DES au voisinage de 0, donc elles coïncident sur un voisinage de 0, donc elles coïncident partout et comme elles caractérisent la loi c'est bon)*

Th : X et Y deux va bornées. Si elles ont même moments alors elles ont même loi [BL 66] *(car dans ce cas, la FC est analytique ; il existe des variantes avec hypothèses plus faibles)*

4) Caractérisations de l'indépendance [BL]

Déf : généralisation de la FC aux vecteurs.

Th : une famille (X1,…Xn) de va réelles sont indépendantes ssi la FC de (X1,…,Xn) en (t1,…,tn) est le produit des FC [BL 80]

Attention : si X et Y sont indépendantes alors E(XY)=E(X)E(Y) mais réciproque fausse. Par contre, E(XY)=E(X)E(Y) ssi Xet Y non corrélées.

Appl : X=(X1,…,Xd) un vecteur gaussien. Alors ses coordonnées sont indépendantes ssi elles sont non corrélées [BL 101] *(par la fonction caractéristique)*

II) Loi d'une somme de v.a indépendantes

1) Produit de convolution

Prop : la loi de X+Y est définie par le pdt de convolution [BL 85]

Csq : cas particulier où les va sont à densité

Ex : somme de deux lois de Poisson, deux lois normales [BL 87-89]

2) FC d'une somme de va indépendantes

Th : si X et Y sont indpt alors FC(X+Y)=FC(X)FC(Y) [BL 86] *(facile : on utilise que deux va sont indépendantes ssi E(f(X)g(Y))=E(f(X))E(g(Y)) pour f,g boréliennes)*

Th : pareil pour la FGM [Ross 407]

Ex : somme de deux lois normales via fonctions caractéristiques [BL 89]

C-ex : attention, réciproque fausse *(loi de Cauchy : FC(X+X)=FC(2X)=FC(X)^2 mais X et X sont pas indépendantes)*

Ex : somme de lois gamma [BL 103]

Appl : une loi gamma est somme d'exponentielles indépendantes [BL 103]

3) Va gaussiennes et indépendance

Th : soient deux va de carré intégrable, indépendantes. Alors X+Y et X-Y sont indépendantes ssi X et Y sont des lois normales

Th : le th précédent reste vrai si on ne suppose pas X et Y de carré intégrable

III) Convergences en loi et cv de la fct caractéristique

Déf. Converger en loi c'est pareil si f est dans Cb ou C0.

Théorème de Lévy [ZQ]

Loi faible des grands nombres

Appl : loi faible des grands nombres (donne une cv en proba) [BL 132] *(les FC sont dérivables car va L^1 donc FC(t)=1+o(t), donc la FC de Sn/n en t vaut 1+o(t), or 1 est la FC du dirac en 0, donc Xn cv en loi vers le dirac en 0 qui est une cste donc cv en proba)*

TCL et applications

Appl : TCL [GL 180]

Appl : Stirling [GL 181]

Loi des évènements rares

Appl : loi des évènements rares [Ouv 321]

Appl : TCL poissonien

Ex : proba d'avoir des erreurs dans un livre de 500 pages

ANNEXE : fonctions caractéristiques et transformées de Laplace des fonctions usuelles [BL]

Développements :
1 - TCL + Lévy [ZQ 536] (***)
2 - Somme de lois normales [Carr] (***)

Bibliographie :
[BL]
[Ren] Rényi – Calcul des probabilités
[GS] Grimmet & Stirzaker
[Car]
[GL] Girardin & Limnios
[Ouv] Ouvrard – Probabilités 2
[ZQ]